ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Солопова Надежда Константиновна, к.п.н.,
проректор по учебно-методической
работе и информатизации;
Нахман Александр Давидович, к.ф.-м.н., доцент,
профессор кафедры общеобразовательных дисциплин;
Иванова Ирина Юрьевна,
доцент кафедры общеобразовательных дисциплин,
ТОГОАУ ДПО «Институт повышения
квалификации работников образования»

1. Общие проблемы мотивации математической деятельности.

Проблема мотивации - одна из центральных в математическом образовании. Согласно Концепции развития российского математического образования, данная проблема обусловлена следующими факторами:

-общественная недооценка значимости математического образования,

-устаревшее содержание курса математики,

-отсутствие учебных программ, отвечающих потребностям обучающихся.
-выбор содержания математического образования устаревать и остается формальным и оторванным от жизни.

Проводя интернет-опрос учителей математики Тамбовской области на тему «Почему известные из педагогической литературы средства повышения мотивации не дают должного эффекта, и какие технологические приёмы следует использовать в процессе решения данной проблемы», мы получили ряд любопытных ответов. Приведем некоторые из них.

«Однозначного ответа здесь нет. Эффект не достигается эффект по ряду причин, зависящих, как от учителя, так и от ученика.

Причины, зависящие от учителя:

- неправильный отбор содержания;
- перегрузка домашним заданием;
- отсутствие оптимального сочетания современных способов и методов обучения.

Причины, зависящие от ученика:

- низкий уровень знаний;
- не сложившиеся отношения с классом.

Но в каждом конкретном случае, могут быть еще и какие-либо дополнительные причины, так что подходить к решению этого вопроса тоже нужно индивидуально, с учетом ситуации».

«Следует особое внимание обратить на внеклассную работу: элективы, кружки. Данные средства позволяют поддерживать и развивать мотивацию у значительной части учащихся»

«Только лишь учебная информация не побуждает учащихся к математической деятельности, поэтому необходимо учебный материал подавать в такой форме, чтобы вызвать у учеников эмоциональный отклик. В связи с этим необходим особый подход к освещению учебного материала, характер его преподнесения. Следовательно, на уроках нужно применять методы проблемного обучения, т.к. такое обучение заставляет учащихся искать истину, находить элемент противоречий. Обстановка обсуждения, раздумий, поиска плодотворно сказывается на развитии мотивации»

«Если мы хотим мотивировать детей, нужно найти подход ко всем ученикам, без деления их на сильных и слабых. Поощрять любое, даже незначительное начинание, хвалить за достигнутые результаты. Тревожность и страх сделать что-то неправильно не способствует развитию мотивации».

«Необходимо оптимальное сочетание современных методов обучения. Все должно быть подчинено целям урока. Нужно постараться учесть все факторы (содержание, сложность учебного материала, возраст учащегося и.т.д.), оценить преимущества и недостатки известных методов и выбрать наиболее приемлемый (выгодный) для решения поставленных задач. Нужный эффект может дать поисковый (исследовательский) метод в сочетании методом проблемного изложения. Но вот чтобы ориентироваться в способах и методах, необходимо постоянное повышение своего профессионального уровня».

«Думаю, что эффект не достигается из-за пресыщенности информации у учащихся. Сегодня очень трудно удивить ребенка. А мышление начинается с удивления. Удивление – двигатель познания. Поэтому: ищем, находим и удивляем!»

«Математику часто называют «сухой наукой». Следовательно, наша задача - математику на уроках немного оживить, приблизить к жизни».

«Высокой мотивации учащихся к образованию в целом, и математики в частности, можно добиться создавая в ходе обучения ситуацию успеха для каждого учащегося. Это повлечёт за собой повышение интереса к изучению предмету и рост их потребности к познанию и изучению предмета. Следует применять такие методы обучения в основе которых лежит совместная познавательная деятельность учащихся и учителя. К таким методам можно отнести, например, создание и анализ конкретной проблемной ситуации, исследовательскую и проектную деятельность, решение логических и занимательных задач».

Легко заметить, что в данных ответах позвучали лишь общие положения технологии обучения («удивлять», устранять тревожность и неуверенность, создавать «ситуации успеха», применять исследовательскую и проектную деятельность и т.п.). С нашей точки зрения, решению поставленной проблемы во многом может способствовать технология математического моделирования.

2. Понятийно-категорийный аппарат математического моделирования.

Как известно мотив рождается вследствие осознания учащимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений, приобретения представлений о широком спектре применений математических знаний и умений. Наибольшее влияние оказывает тот учебный материал, информационное содержание которого соответствует личным и вновь возникающим потребностям учащегося. В частности, это

-практико-ориентированные задачи;

-задачи прикладного (межпредметного) характера.

Каждая практическая или прикладная задача, решаемая средствами математики, сопровождается переводом ее условия на математический язык и последующим решением с использованием понятий, фактов и методов математической науки. Указанный процесс является ничем иным, как процессом *математического моделирования.*

С понятием модели и целями моделирования учащемуся на доступном уровне целесообразно познакомиться уже в курсе основной школы. Модель в его представлении должна ассоциироваться с неким образом реального объекта или процесса, моделирование – это путешествие в сказочную страну «Математика», где живут символы, формулы, графики, геометрические фигуры и др., в которые волшебным образом превратились предметы, взаимоотношения, действия, существующие в реальном мире. При этом задача учащегося – выполнить какие-либо действия и «разгадать», что кроется за итоговой формулой, тем или иным результатом, - словом, восстановить цепочку подлинных событий и фактов.

Ознакомление с «миром моделей» на более строгом уровне возможно в старшей школе.

Моделирование традиционно понимается как замещение некоторого объекта A (оригинала) другим доступным объектом M (моделью) с целью изучения свойств оригинала. Имеющиеся в литературе подходы к соответствующему понятию позволяют нам выделить то общее, что присуще именно *математической* модели: математическая модель есть образ оригинала, выраженный с помощью математических символов (математическим языком) и позволяющий свойства объекта-прообраза, его параметры, внутренние и внешние связи описать в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций.

Другими словами, прикладная задача "переводится" на формальный математический язык, и решается средствами же математики; следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются затем на языке, принятом в данной предметной области.

Учащиеся должны четко представлять и уметь реализовывать (на доступном им уровне) три основные этапа процесса математического моделирования:

1.Содержательная модель (описание ситуации, процесса в терминах исходной предметной области). Формализация модели (формулировка математической задачи).

2.Исследование модели средствами математики (решение математической задачи).

3.Интерпретация модели: выводы в терминах исходной предметной области. Именно на этапе возвращения к исходной предметной области мы получаем требуемую информацию об исходном процессе (явлении), которую мы не могли получить другими средствами. В частности, если речь идет о процессе, то возникает возможность

- определить состояние процесса в определенные моменты времени, промежуточные между теми, в которые это состояние уже было известно;

- прогнозировать состояние процесса за рамками данного временного интервала.

Первая возможность называется *интерполяцией*, вторая – *экстраполяцией.*

Приведем пример построения и анализа математической модели. *Я решил «прикольным образом» покрасить пол в моей комнате в два разных цвета, разделив его по диагонали. Хватит ли мне литровой банки зеленой краски на половину комнаты, если размеры комнаты таковы: длина 5 м, ширина 3 м., а расход краски составляет 1 л. на 10 м*^{2}

Мама разрешит мне осуществить этот план, если я запишу формулу для расчета расхода краски в виде зависимости ее количества (в литрах) от площади окрашиваемой поверхности (в м^2*). Какова должна быть эта формула?*

Решение.

1. Содержательная модель: общий расход краски прямо пропорционален площади окрашиваемой поверхности, то есть надо найти площадь половины комнаты, перемножить с расходом краски на 1 м^2, и сравнить результат с 1 литром краски в банке.

Формализация задачи:

$c = \frac{1}{10}$ л. - расход краски на 1 м^2 ,

S - площадь комнаты (подлежит нахождению);

V - общий расход краски (требуется по условию задачи).

2. Математическая модель:

$V = c \cdot S$, где площадь $S = \frac{1}{2} x \cdot y$ найдена как половина площади прямоугольника, x - длина, y - ширина комнаты.

Итак, математическая постановка задачи: провести вычисления по формуле $V = \frac{1}{2} cxy$ (формула, которую просила получить мама). Имеем $V = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 5 \cdot 3 = 0{,}75$

3. Интерпретация модели в данном случае состоит в сравнения результата с объемом банки 1 л.; имеем $0{,}75 < 1$, то есть краски хватит и еще четверть банки останется.

3. Схема представления модели. Полезно ознакомить учащихся со следующей общей схемой представления модели: $X \to W \to Y$. Здесь X – вектор входных переменных, Y – вектор выходных переменных (исходы модели); W – так называемый оператор модели, обеспечивающий преобразование информации (X преобразуется в Y) в соответствие с задачей, решаемой на модели.

Следует подчеркнуть, что поиск оператора модели часто есть составная часть процесса моделирования. При этом возможны случаи «черного ящика» – оператор модели полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора неизвестны значения параметров.

Пример. Известно, что в условиях данного опыта температура нагревающейся жидкости растет по линейному закону. В начальный момент температура была равна 20^0 *C, а через 40 секунд она поднялась до* 25^0. *Определить, какая температура жидкости была через 24 секунды с момента начала нагрева.*

Данная задача относится к числу интерполяционных: найти промежуточное состояние процесса. Если считать , что вектор входных переменных имеет компонентами заданные моменты времени, т.е. X={0, 24, 40}, а Y={20, у, 25}- вектор выходных переменных, т.е. наблюдаемых «на выходе» температур, то нахождению подлежит значение y=y(24). При этом, по условию задачи, оператор модели W имеет линейную структуру $y = kx + b$, т.е. представляет собою «серый ящик». Нахождению подлежат значения параметров k и b. Имеем

$$\begin{cases} 20 = k \cdot 0 + b \\ 25 = k \cdot 40 + b \end{cases}, \text{ откуда } \quad b = 20, \quad k = 0{,}125.$$

Итак, оператор модели $y = 0{,}125x + 20.$ Теперь $y = 0{,}125 \cdot 24 + 20$ или $y = 23^0.$

4. Детерминированные и стохастические модели. Среди моделей, изучаемых в школьном курсе мы выделяем

1) *детерминированные модели*; здесь исследователь исходит из предположения отсутствия всяких случайных воздействий; элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установлены, поведение объекта или процесса можно точно определить; используемый математический аппарат: алгебра, геометрия, математический анализ; приведенные выше примеры относятся к детерминированным моделям.

2) *стохастические модели*, которые описывают случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах; используемый математический аппарат: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов. Приведем примеры стохастических моделей.

Пример 1 (относительная частота, статистическая вероятность события). Понаблюдайте на улице с не слишком интенсивным движением *транспорта в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найдите относительную частоту*

а) числа легковых автомобилей в транспортном потоке;

б) такси в транспортном потоке;

в) такси – среди легковых автомобилей;

г) иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что в ближайшее время первой среди проезжающих мимо машин окажется такси ?

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Пример 2 (статистические методы обработки выборки). В течение 20 биржевых торгов курс доллара составил следующие значения (в рублях):

65,75; 65,8; 65,7; 65,7; 65,6; 65,65; 65,6; 65,65; 65,65; 65,7; 65,8; 65,8; 65,8; 65,7; 65,7; 65,7; 65,7; 65,6; 65,5; 65,65

Построить вариационный ряд данного распределения выборки и полигон частот.

Найти: а) моду статистического распределения Мо; б)медиану Ме ; в)размах варьирования R ; г)средний курс доллара.

Если основные тенденции колебаний курса валюты будут сохраняться, то какова прогнозируемая вероятность того, что курс доллара превысит 65, 7 рубля?

В обоих примерах строится стохастическая модель процесса (события обнаружения того или иного вида автомобиля в транспортном потоке - случайное, характер колебаний курса валюты – случайный). Аппарат исследования – методы математической статистики; прогнозируемая вероятность (в силу закона больших чисел) может быть принята равной относительной частоте соответствующего события.

5. Универсальность. Свойство *универсальности* математических моделей проявляется в возможности применения одной и той же модели к объектам (системам) принципиально различной природы, подчиняющимся разным фундаментальным законам. Универсальность математических моделей объясняется, с одной стороны, как единством проявления физических свойств окружающего мира, так и абстрактностью математических теорий, их отвлеченностью от объекта исследования с другой стороны. «Математика - это искусство давать разным вещам одно наименование».

Примером простейшей универсальной математической модели является функциональная зависимость $y = k x$. При соответствующем «наполнении» данное уравнение может описывать совершенно разные закономерности (закон Ома $V = IR$, размер уплачиваемого налога при постоянном проценте отчисления и др.).

Такая зависимость действует в следующих задачах.

1. Задачи на движение: линейная зависимость между переменными S (длина пути, пройденного прямолинейно движущимся телом), v

(скорость равномерного движения) и t (время движения).

2. Задачи на тему «Работа»: линейная зависимость между объемом работы A, производительностью v и временем выполнения работы t.

3. Задачи на тему «Смеси, сплавы»: линейная зависимость между массой смеси (сплава) M, концентрацией вещества c и массой «чистого» вещества m.

Оператор модели в этих случаях – это «аддитивный закон» (закон сложения):

1. Встречное движение: расстояние между пунктами равно сумме отрезков пути, пройденных участниками движения до их встречи.

2. Совместная работа: весь ее объем складывается из долей, выполненных участниками.

3. Смеси, сплавы: масса M всей смеси (сплава) складывается из масс ее (его) компонент; масса чистого вещества m в смеси (сплаве) складывается из масс чистого вещества в каждом компоненте.

Решение полученной математической задачи есть решение уравнения или системы уравнений, определяемых оператором модели.

Таким образом, наличие свойств универсальности математических моделей расширяет представления учащихся о роли и методах математической науки и опосредованно служит дополнительным мотивом к математической деятельности.

Список литературы

1. Концепция развития российского математического образования. Основное содержание [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 5.09.16).

2. Нахман А.Д. Формирование компетенции математического моделирования в условиях реализации Концепции развития математического образования //Международный журнал экспериментального образования. - 2016.- №2.- С. 282-286.

3. Пуанкаре А. О науке / М.: Наука. -1990. - 736с.